PART2　連続型確率変数の期待値と標準偏差

2　a を正の実数とする。連続型確率変数 X のとりうる値 x の範囲が $-a \leqq x \leqq 2a$ で，確率密度関数が

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{3a^2}(x+a) & (-a \leqq x \leqq 0) \\ \dfrac{1}{3a^2}(2a-x) & (0 \leqq x \leqq 2a) \end{cases}$$

であるとする。

(1)　$a \leqq X \leqq \dfrac{3}{2}a$ となる確率を求めよ。

(2)　X の期待値，標準偏差を求めよ。

(3)　$Y=3X+7$ とするとき，Y の期待値，標準偏差を求めよ。

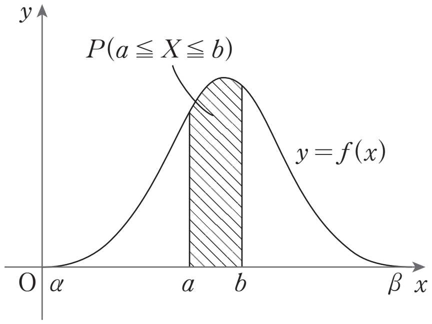
Point Pickup

連続型確率変数 X の確率密度関数を $f(x)\,(\alpha \leqq x \leqq \beta)$

とすると

$$P(a \leqq X \leqq b)=\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=1$$



確率変数 X の

期待値　$E(X)=m=\displaystyle\int_\alpha^\beta xf(x)dx$

分散　$V(X)=\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-m)^2 f(x)dx=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

標準偏差　$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

第 5 講　PART2　確認問題

a を正の実数とする。連続型確率変数 X のとりうる値 x の範囲が $-2a \leqq x \leqq 3a$ で，確率密度関数が

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5a^2}(x+2a) & (-2a \leqq x \leqq 0)\\[2mm] \dfrac{2}{15a^2}(3a-x) & (0 \leqq x \leqq 3a)\end{cases}$$

であるとする。

1　$-a \leqq X \leqq a$ となる確率を求めよ。

$$\frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$$

2　X の期待値 $E(X)$，標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ。

また，$Y=-6X-5$ とするとき，Y の期待値 $E(Y)$，標準偏差 $\sigma(Y)$ を求めよ。

$$E(X)=\frac{a}{\boxed{\text{オ}}} \qquad \sigma(X)=\frac{\sqrt{\boxed{\text{カキ}}}}{\boxed{\text{ク}}}a$$

$$E(Y)=\boxed{\text{ケコ}}\,a-\boxed{\text{サ}} \qquad \sigma(Y)=\sqrt{\boxed{\text{シス}}}\,a$$

PART2　連続型確率変数の期待値と標準偏差

2　a を正の実数とする。連続型確率変数 X のとりうる値 x の範囲が $-a \leqq x \leqq 2a$ で，確率密度関数が

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3a^2}(x+a) & (-a \leqq x \leqq 0)\\[2mm] \dfrac{1}{3a^2}(2a-x) & (0 \leqq x \leqq 2a)\end{cases}$$

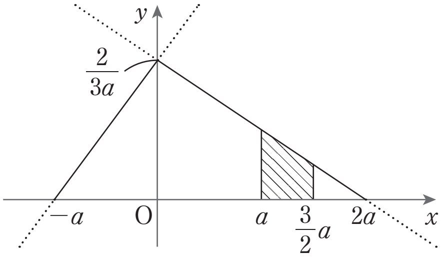
であるとする。

(1)　$a \leqq X \leqq \dfrac{3}{2}a$ となる確率を求めよ。

(2)　X の期待値，標準偏差を求めよ。

(3)　$Y=3X+7$ とするとき，Y の期待値，標準偏差を求めよ。

(1)
$$P\left(a \leqq X \leqq \frac{3}{2}a\right)=\int_a^{\frac{3}{2}a}\frac{1}{3a^2}(2a-x)dx$$
$$=\frac{1}{3a^2}\left[2ax-\frac{1}{2}x^2\right]_a^{\frac{3}{2}a}$$
$$=\frac{1}{3a^2}\left\{\left(3a^2-\frac{9}{8}a^2\right)-\left(2a^2-\frac{1}{2}a^2\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{15}{8}-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{8}$$



(2)　X の期待値は

$$E(X)=\int_{-a}^{2a}xf(x)dx$$
$$=\int_{-a}^{0}\frac{2}{3a^2}x(x+a)dx+\int_0^{2a}\frac{1}{3a^2}x(2a-x)dx$$
$$=\int_{-a}^{0}\frac{2}{3a^2}(x^2+ax)dx+\int_0^{2a}\frac{1}{3a^2}(2ax-x^2)dx$$
$$=\frac{2}{3a^2}\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2\right]_{-a}^{0}+\frac{1}{3a^2}\left[ax^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{2a}$$
$$=\frac{2}{3a^2}\left(-\frac{1}{6}a^3\right)+\frac{1}{3a^2}\cdot\frac{4}{3}a^3=-\frac{1}{9}a+\frac{4}{9}a=\frac{a}{3}$$

$$E(X^2)=\int_{-a}^{2a}x^2f(x)dx$$
$$=\int_{-a}^{0}\frac{2}{3a^2}x^2(x+a)dx+\int_{0}^{2a}\frac{1}{3a^2}x^2(2a-x)dx$$
$$=\int_{-a}^{0}\frac{2}{3a^2}(x^3+ax^2)dx+\int_{0}^{2a}\frac{1}{3a^2}(2ax^2-x^3)dx$$
$$=\frac{2}{3a^2}\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}ax^3\right]_{-a}^{0}+\frac{1}{3a^2}\left[\frac{2a}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{2a}$$
$$=\frac{2}{3a^2}\cdot\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{3a^2}\cdot\frac{4}{3}a^4=\frac{1}{18}a^2+\frac{4}{9}a^2=\frac{a^2}{2}$$

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{a^2}{2}-\left(\frac{a}{3}\right)^2=\frac{7}{18}a^2$$

よって X の標準偏差は

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{7}{18}a^2}=\frac{\sqrt{14}}{6}a$$

(3)　Y の期待値は

$$E(Y)=E(3X+7)=3E(X)+7=3\cdot\frac{a}{3}+7=a+7$$

Y の標準偏差は

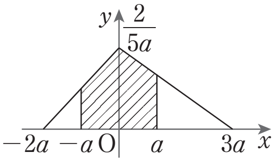
$$\sigma(Y)=\sigma(3X+7)=|3|\sigma(X)=3\cdot\frac{\sqrt{14}}{6}a=\frac{\sqrt{14}}{2}a$$

第 5 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] アイ：19，ウエ：30

[解説]



$$P(-a \leqq X \leqq a)$$

$$=\int_{-a}^{0}\frac{1}{5a^2}(x+2a)dx$$

$$+\int_{0}^{a}\frac{2}{15a^2}(3a-x)dx \quad \text{[A]}$$

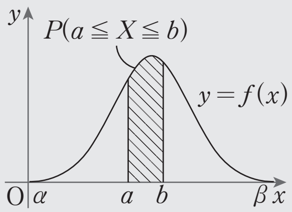
$$=\frac{1}{5a^2}\left[\frac{1}{2}x^2+2ax\right]_{-a}^{0}+\frac{2}{15a^2}\left[3ax-\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{a}$$

$$=-\frac{1}{5a^2}\left(\frac{1}{2}a^2-2a^2\right)+\frac{2}{15a^2}\left(3a^2-\frac{1}{2}a^2\right)$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{2}+\frac{2}{15}\cdot\frac{5}{2}=\mathbf{\frac{19}{30}}$$

[A]　連続型確率変数 X の確率密度関数を $f(x)$ $(\alpha \leqq x \leqq \beta)$ とすると

$$P(a \leqq X \leqq b)=\int_a^b f(x)dx$$



2 **[正解]** **オ**：3，**カキ**：38，**ク**：6，**ケコ**：-2，
サ：5，**シス**：38

[解説]

X の期待値は

$$E(X)=\int_{-2a}^{3a}xf(x)dx \quad \text{[B]}$$
$$=\int_{-2a}^{0}\frac{1}{5a^2}x(x+2a)dx+\int_{0}^{3a}\frac{2}{15a^2}x(3a-x)dx$$
$$=\int_{-2a}^{0}\frac{1}{5a^2}(x^2+2ax)dx+\int_{0}^{3a}\frac{2}{15a^2}(3ax-x^2)dx$$
$$=\frac{1}{5a^2}\left[\frac{1}{3}x^3+ax^2\right]_{-2a}^{0}+\frac{2}{15a^2}\left[\frac{3}{2}ax^2-\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{3a}$$
$$=-\frac{1}{5a^2}\left(-\frac{8}{3}a^3+4a^3\right)+\frac{2}{15a^2}\left(\frac{27}{2}a^3-9a^3\right)$$
$$=-\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{3}a+\frac{2}{15}\cdot\frac{9}{2}a=\boldsymbol{\frac{a}{3}}$$

[B]　連続型確率変数 X の
期待値　$E(X)=m=\int_{\alpha}^{\beta}xf(x)dx$
分散　$V(X)=\int_{\alpha}^{\beta}(x-m)^2f(x)dx$
$=E(X^2)-\{E(X)\}^2$
標準偏差　$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

ここで

$$E(X^2)=\int_{-2a}^{3a}x^2f(x)dx$$
$$=\int_{-2a}^{0}\frac{1}{5a^2}x^2(x+2a)dx+\int_{0}^{3a}\frac{2}{15a^2}x^2(3a-x)dx$$
$$=\int_{-2a}^{0}\frac{1}{5a^2}(x^3+2ax^2)dx$$

$$+\int_0^{3a}\frac{2}{15a^2}(3ax^2-x^3)dx$$

$$=\frac{1}{5a^2}\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}ax^3\right]_{-2a}^{0}$$

$$+\frac{2}{15a^2}\left[ax^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^{3a}$$

$$=-\frac{1}{5a^2}\left(4a^4-\frac{16}{3}a^4\right)$$

$$+\frac{2}{15a^2}\left(27a^4-\frac{81}{4}a^4\right)$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{3}a^2+\frac{2}{15}\cdot\frac{27}{4}a^2=\frac{7}{6}a^2$$

ゆえに

$$V(X)=E\left(X^2\right)-\{E(X)\}^2$$

$$=\frac{7}{6}a^2-\left(\frac{a}{3}\right)^2=\frac{19}{18}a^2$$ [B]

よって，X の標準偏差は

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{19}{18}a^2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{38}}{6}a}$$ [B]

また，Y の期待値は

$$E(Y)=E(-6X-5)=-6E(X)-5$$ [C]

$$=-6\cdot\frac{a}{3}-5=\boldsymbol{-2a-5}$$

Y の標準偏差は

$$\sigma(Y)=\sigma(-6X-5)=|-6|\sigma(X)$$

$$=6\cdot\frac{\sqrt{38}}{6}a$$

$$=\boldsymbol{\sqrt{38}\,a}$$

[C] 確率変数 X と定数 a, b について，$Y=aX+b$ とすると

期待値　$E(Y)=E(aX+b)$

$=aE(X)+b$

分散　$V(Y)=V(aX+b)=a^2V(X)$

標準偏差

$\sigma(Y)=\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$